

1 Exercices

1.1 Systèmes de Cramer

Ces systèmes apparaissent lorsque l'on démontre qu'une famille de vecteurs est libre.

Exercice 1 : Résoudre les systèmes linéaires homogènes suivants.

$$1. \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Résoudre les systèmes linéaires avec second membre suivants.

$$1. \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

1.2 Systèmes se résolvant à l'aide de deux variables auxiliaires

Ces systèmes apparaissent lorsque l'on calcule un sous-espace propre de dimension 2.

Exercice 3 : Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$1. \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 6x - 4y + 2z = 0 \\ -3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ -2x - 8y + 2z = 0 \\ 3x + 12y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -4x + 2y + 2z = 0 \\ 4x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

1.3 Systèmes se résolvant à l'aide d'une seule variable auxiliaire

Ces systèmes apparaissent lorsque l'on calcule un sous-espace propre de dimension 1.

Exercice 4 : Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$1. \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3y + 5z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 2x - 7y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

2 Réponses courtes

Réponses de l'exercice 1 :

$$1. \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

$$4. \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

$$2. \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

$$5. \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

$$3. \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Réponses de l'exercice 2 :

$$1. \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Réponses de l'exercice 3 :

$$1. \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 6x - 4y + 2z = 0 \\ -3x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff z = 2y - 3x$$

$$3. \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -4x + 2y + 2z = 0 \\ 4x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff z = 2x - y$$

$$2. \begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ -2x - 8y + 2z = 0 \\ 3x + 12y - 3z = 0 \end{cases} \iff x = -4y + z$$

Réponses de l'exercice 4 :

$$1. \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3}z \\ y = -\frac{7}{6}z \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3y + 5z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{5}{14}x \\ z = \frac{3}{14}x \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 2x - 7y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

3 Corrections détaillées

Correction détaillée de l'exercice 1 :

1.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ -y - 3z = 0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} && \text{(par remontées successives)} \end{aligned}$$

2. A compléter...